

Équilibre d'un solide soumis à trois forces non parallèles

I-Condition d'équilibre d'un solide soumis à trois forces :

1-Expérience :

On étudie l'équilibre d'une plaque de masse négligeable.

La plaque est soumise à l'action de trois forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 .

2-Observations :

On constate que les trois forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 :

- Sont situées dans le même plan, on dit qu'elles sont **coplanaires** ;
- Se coupent en un même point O, on dit qu'elles sont **concurrentes**.
-

3-Relation entre les vecteurs forces :

3-1-Méthode graphique :

En traçant le polygone des forces à une échelle choisie. On place l'origine d'un des vecteurs à l'extrémité de l'autre vecteur et on complète le triangle.

La **ligne polygonale** des trois forces est **fermée** traduit graphiquement la relation vectorielle :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

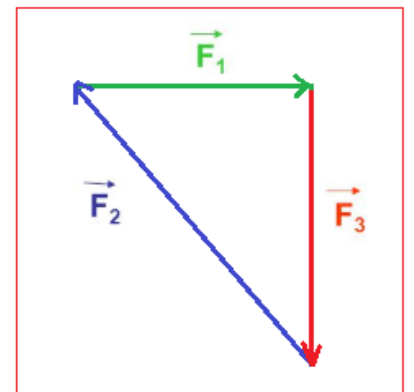
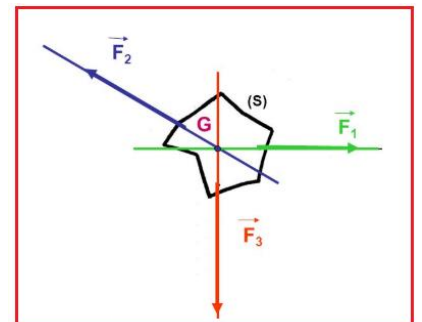
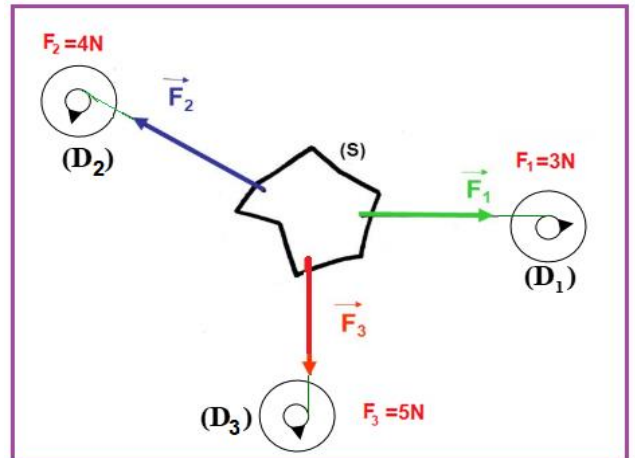
3-2-Méthode analytique :

Dans un repère orthonormé les coordonnées de chaque force sont :

$$\vec{F}_1 \begin{pmatrix} F_{1x} = 3 \\ F_{1y} = 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 \begin{pmatrix} F_{2x} = -3 \\ F_{2y} = 4 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_3 \begin{pmatrix} F_{3x} = 0 \\ F_{3y} = -4 \end{pmatrix}$$

La projection des trois forces sur l'axe Ox et Oy donne :

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \end{cases}$$

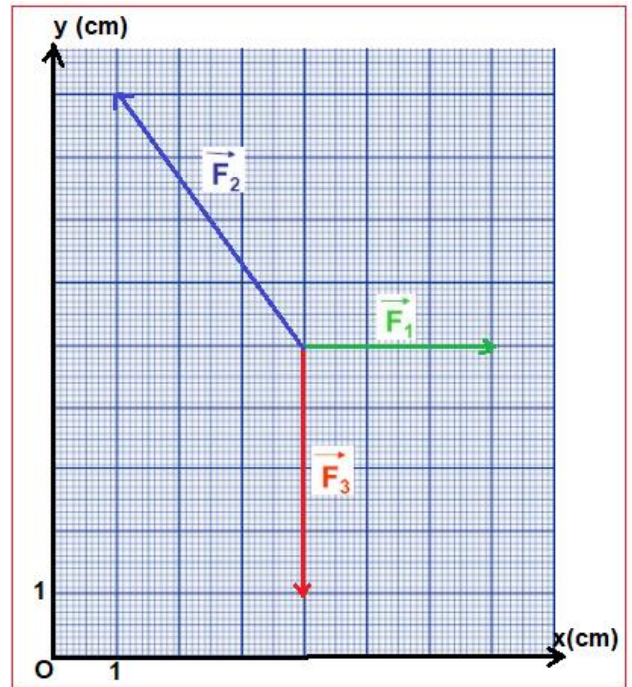


Donc : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

4-Condition d'équilibre :

Si un slide soumis à trois forces \vec{F}_1, \vec{F}_2 et \vec{F}_3 non parallèles est en équilibre :

- les trois forces sont coplanaires et concourantes.
- la somme vectorielle des trois forces est égale au vecteur nul : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

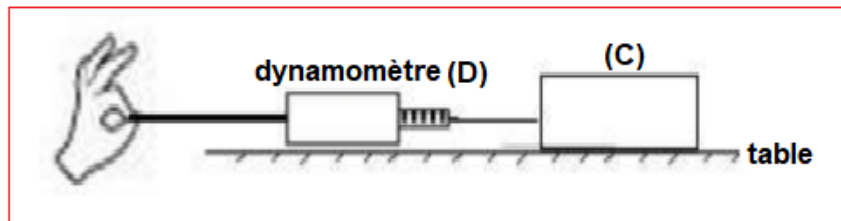


II-Force de frottement :

1-Expérience :

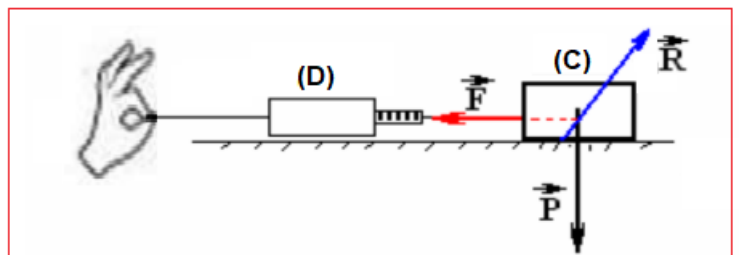
Sur une table horizontale, on place un corps (C) sur lequel on exerce une force \vec{F} à l'aide d'un dynamomètre (D), comme l'indique la figure.

On augmente successivement l'intensité de la force \vec{F} jusqu'à ce que le corps (C) se mette en mouvement.



2-Angle de frottement :

On constate que la réaction \vec{R} exercée par la table n'est pas perpendiculaire à la surface de contact, elle forme un angle φ avec la normale qu'on appelle angle de frottement.



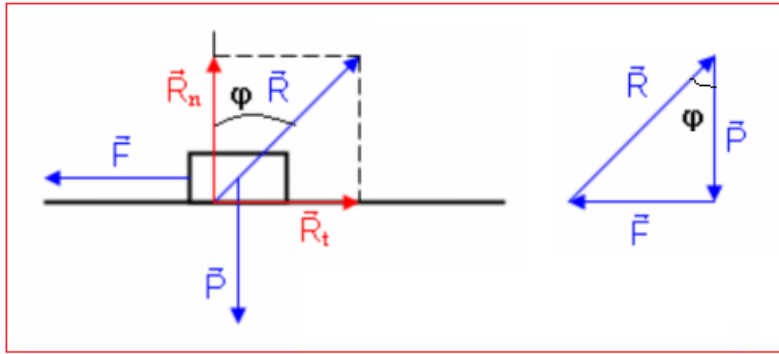
On peut décomposer la réaction \vec{R} en deux composantes :

\vec{R}_N : La composante normale.

\vec{R}_T : La composante tangentielle qui s'appelle force de frottement \vec{f} .

$$\tan\varphi = \frac{R_T}{R_N}$$

On appelle le coefficient de frottement : $k = \tan\varphi$



3-Angle de frottement statique :

Le corps (C) est en équilibre sous l'action de trois forces : \vec{F} , \vec{R} et son poids \vec{P} .

A cause de frottement le corps (C) reste en équilibre tend que la force \vec{F} est intérieure à une valeur minimale \vec{F}_m .

❖ $F < F_m$ le solide est en équilibre $\varphi < \varphi_0$ tel que φ_0 est l'angle de frottement statique.

❖ $F > F_m$ le solide est en mouvement $\varphi > \varphi_0$.

On définit le coefficient de l'angle statique k_0 par la relation : $k_0 = \tan\varphi_0$

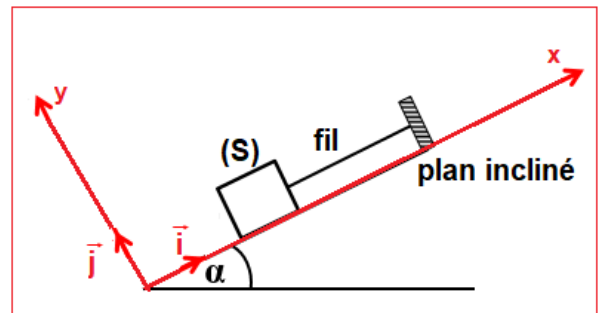
III-Exercice d'application :

Un solide (S) est attaché à un fil inextensible sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (voir figure).

Le contact entre la plan incliné et le solide se fait sans frottements.

Déterminer les intensités des forces appliquées sur le solide (S).

On donne $m = 500 \text{ g}$; $g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$ et $\alpha = 30^\circ$.



Solution :

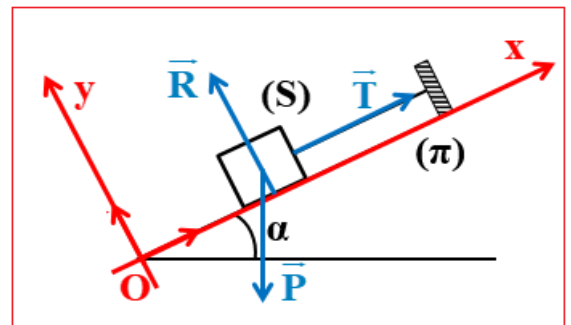
-système étudié : le corps (S)

-bilan des forces qui s'exercent sur le corps (S) :

\vec{R} : la réaction du plan incliné.

\vec{T} : la tension du fil.

\vec{P} : le poids du solide (S).



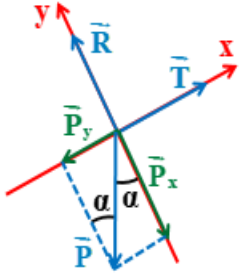
-Le solide (S) est en équilibre on

écrit : $\vec{R} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$

La projection des forces sur les axes

Ox et Oy :

$$\begin{cases} R_x + T_x + P_x = 0 \\ R_y + T_y + P_y = 0 \end{cases}$$



$$\sin\alpha = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = P \cdot \sin\alpha$$

$$P_x = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = P \cdot \cos\alpha$$

$$P_y = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Les coordonnées des forces dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) sont :

$$\vec{R} \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = R \end{cases} \quad \vec{T} \begin{cases} T_x = T \\ T_y = 0 \end{cases} \quad \vec{P} \begin{cases} P_x = m \cdot g \cdot \sin\alpha \\ P_y = m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + T + m \cdot g \cdot \sin\alpha = 0 \\ R + 0 + m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = m \cdot g \cdot \sin\alpha \\ R = m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

A.N :
$$\begin{cases} T = 0,5 \times 10 \times \sin(30^\circ) \\ R = 0,5 \times 10 \times \cos(30^\circ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 2,5 \text{ N} \\ R = 4,33 \text{ N} \end{cases}$$

Remarque :

Les mêmes résultats sont obtenus en utilisant la méthode graphique.

$$\sin\alpha = \frac{T}{P} \Rightarrow T = P \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{P} \Rightarrow R = P \cdot \cos\alpha$$
